零、因次分析

本書無因次群解法參考 3W 書中的解法，考試時題目如無指定解法，建議以白金漢法解之，雷諾分析法的解法較複雜且需設定變數，白金漢法則無此問題，只要一開始所設的變數群和一般讀者所常見無因次群相同則可順利解出，驗算時確認解出之無因次群是否有和常見的無因次有無一致性，可簡單的做辨別解題過程是否有錯，另外如果單位換算觀念比較不好的同學，分不清楚 SI 和 FPS 制的差異，建議可以去翻閱台科大出版社的化工裝置的第一章：單位與因次，可更事半功倍。本章節考的比例上不多，但偶而有單位因次或因次分析的冷箭題型出現必需注意。

(一)因次分析法定義

許多重要的工程問題無法以理論或數學方法完全解決時，必需借助因次分析法(dimensional analysis)來簡化複雜問題，將有關變數做合理歸納，成爲無因次群，並由實驗數據完成變數與函數之間的圖形關係，也可能成爲方程式，以解決工程上難以解決的問題。

(二)白金漢理論(Buckingham π Theory)

1.定出變數 n 及採用之基本變數 r(一般爲$M.L.\theta$);無因次群數目爲$\pi = n - r$。

2.選 r 個再現變數(recurring variables)必須使所採用之基本因次皆出現至少一次。

3.將基本因次改以再現變數取代。

4.將非再現變數乘以因次倒數，變成無因次群 π。

5.將無因次群中的基本因次以再現變數取代，即可得到最終之無因次群。

(三)雷諾分析法(Rayleigh 法)：保留變數類似 try and error

1.列出函數和指數之間的乘積。

2.列出函數和指數之間的因次。

3.列出因次方程式求指數之間的關係(需保留變數才能解)。

4.列出變數間的關係(以無因次群表示)。

π_3：$(D)^a(u)^b(\rho)^c(L)$　$\pi_3 = (L)^a(\frac{L}{\theta})^b(\frac{M}{L^3})^c(L)$

M：$c = 0$

L：$a + b - 3c + 1 = 0$　$a = -1$　　$\pi_3 = \frac{L}{D}$

θ：$-b = 0$　　$b = 0$

可得此關係如證明：$\frac{\Delta P}{\rho u^2} = f(\frac{Du\rho}{\mu}，\frac{L}{D})$

〈類題 0 − 2〉利用雷諾分析法(Rayleigh 法)解上題：
Sol：由$\Delta P = f(D、L、\rho、\mu、u)$ =>5 個變數需有 3 個方程式，需保留兩個變數。
令$\Delta P = f(D^a、L^b、\rho^c、\mu^d、u^d)$
M：$1 = c + d$　　　(1)
※先保留 d，方程式內出現最多次，但 c 和 e 不能保留否則方程式不能解！
L：$-1 = a + b - 3c - d + e$　(2)
θ：$-2 = -d - e$　　　(3)
=>$\frac{M}{L\theta^2} = (M)^{c+d}(L)^{a+b-3c-d+e}(\theta)^{-d-e}$

由(1)式$c = 1 - d$;由(3)式$e = 2 - d$
(1)和(3)式代入(2)式=>$a + b - 3(1 - d) - d + (2 - d) = -1$=>$a = -d - b$
※b 和 a 之間選擇保留 b，但如果保留 a，則方程式解得之無因次群則和一般常見的無因次群不同。
=>$\Delta P = f(D)^{-d-b}(L)^b(\rho)^{1-d}(\mu)^d、(u)^{2-d}$
=>$\frac{\Delta P}{\rho u^2} = f(\frac{Du\rho}{\mu})^{-d}(\frac{L}{D})^b$，可得此關係如證明：$\frac{\Delta P}{\rho u^2} = f(Re，\frac{L}{D})$

〈類題 0 − 3〉攪拌器之動力 P 可因輪葉轉速(N)、輪葉直徑(D_a)、液體密度(ρ)、液體黏度(μ)和重力加速度(g)等變動而變動，試利用白金漢理論(Buckingham π Theory)求出無因次群。

Sol：先求無因次群的數目：$\pi = n - r = 6 - 3(M.L.\theta) = 3$；再以因次表示如下：

二、層流之殼動量均衡及速度分佈

薄殼理論 Shell-balance 是解輸送裡面的相當重要的一環，我們通常對一微小的控制體積去做結算，在流體力學中就是做動量結算；熱量傳送就是做能量結算；在質量傳送中就是做質量結算。另一種方法則是利用輸送三大公式去做約減解題，解輸送只有在剛開始選擇不一樣，題目未指定，你可以使用薄殼理論或者是公式解，如果題目有指定方法，那務必請按照題目所指定方式解之，兩種方式務必都要學會，公式簡化法一般考試都會給 model，只要懂得去做刪除不必要的項目，設起始條件 I.C(initial condition)和邊界條件 B.C(boundary condition)則可解之。

解題過程第一步先做動量均衡先令殼的厚度趨近於零，利用積分第一定律獲得動量流通量(momentum flux)的微分方程式，接著將此微分方程式做積分，得到動量分佈的公式，再來將牛頓黏度定律代入，可得速度微分的方程式，再將微分方程式做積分後就可得到速度分佈的公式。再由速度分佈公式可導正出最大速度、平均速度、體積流率質量流率或固體在邊界的力。當然上述的解題過程中要將微分方程式做積分，積分時一定要有相關的邊界條件才能解出微分方程式。

針對高普考，地方特考，經濟部特考部分，通常使用工數的解法不多，爲什麼呢？因爲通常牽涉到需假設 I.C 的題目需要用到工數的結合變數法或分離變數法，解熱傳還會用到工數中的傅立葉級數，解題過程會相當的繁瑣，所以近年來的單操輸送考試，全工數解題的時代也已過去，也比較不是主流了，反而強調觀念和活用的題目會變多，基本上近幾年國家考試遇到時間項的題目，只要會從公式簡化，然後假設 I.C 和 B.C 就大功告成了，繁瑣使用工數的題目也不常出現，所以讀者也不需太過於緊張，很多公式只要懂得怎麼用並了解其中的物理意義就足夠，少部分的讀者會考高考二級，如果是高考二級輸送考到繁雜解法的機會相當多，工數複雜解法這部分就不能跳過了，準備一般考試的讀者這個章節最主要就是如何利用題目所給的提示去設 B.C，這才是這個章節所需要學習的部分。

其實一開始看到一些怪異的數學式會很恐懼，其實讀者不用害怕，只要將

本書內的題型動筆練個幾次，其實並沒有這麼難，流體力學的解法觀念，熱傳和質傳的觀念都是換湯不換藥，讀者若能練習本書的題型至最後，就會發現一些解題的觀念技巧，其實解輸送也可以很輕鬆。

原文書的各版本有很多種薄殼理論的推導模式，讀者或許會問哪種才正確，我的回答是：其實都對，因爲像 3W，Bird，McCabe，Geankoplips 是最常見的原文書，但推導模式都有些許不同，但結果是一樣的，在流體力學方面我個人比較喜好鼎茂出版社林隆老師的解法，就看讀者的喜好所定，選擇自己熟悉的解法。

※流體力學解題技巧整理：

(一)必要記憶的公式：連續方程式 $\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\,\vec{V})=0$ (物理意義可參考第三章)，另外在密度爲常數時，在平板流動時速度向量運算子座標 x.y.z 展開的方式$\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z}=0$，在圓柱座標向量運算子 r、θ、z 展開的方式$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot V_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial V_z}{\partial z}=0$，請背起來。另外，球體連續方程式的展開在此章節考題不常見，所以不用背。

(二)約減不必要的項目，通常都爲一維空間，保留題目所需的流動方向即可。(三)畫出流動方向的簡圖，標示出座標，此處非常重要，因爲座標取的位置關係到邊界條件，一般定的越簡單越好，舉例來説，兩塊平板間距離爲 2B，座標就定在中間最方便推導與計算，當然也可以定在板子的最上方或最下方，雖然推導出的結果會相同，但反而吃力不討好，這部份就是題型要多累積，才懂得如何訂出最理想的座標。(四)寫出薄殼動量平衡，請將平板、圓柱的導正方法記憶一套屬於適合自己的方式，或是按照此書的寫法動筆跟著寫增加記憶，也可使用原文書的方式。(五)定出邊界條件，不牽涉時間項至少會有兩個 B.C，解出 C_1 與 C_2 再配合邊界條件解出速度分佈，當然上述的解題過程中要將微分方程式做積分，積分時一定要有相關的 B.C 才能解出微分方程式。再由速度分佈爲基礎導出其他題目所需要之要求。相關常用之 B.C 可參考〈考題 2－12〉(91 地方特考)。

Sol：不可以，因為水平同心管的邊界條件和一般圓管不同，所以積分出來的速度分佈與平均速度也不同！

〈考題 2 − 30〉(103 經濟部特考)(15 分)
某一同心圓管，其內管的外徑是r_i，外管的內徑是r_0，有不可壓縮流體流經其間，($r_i < r < r_0$)已知其流速(u_z)分佈(r-方向)之微分，表示如下：$\frac{du_z}{dr} = \left(\frac{\Delta P}{2\mu L}\right)\left(r - \frac{r_m^2}{r}\right)$；其中 L：長度；μ：流體黏度；ΔP：流體入出口壓力差；已知邊界條件$r = r_i$，$u_z = 0$；$r = r_0$，$u_z = 0$。請求出最大速度位置r_m？

Sol：$\frac{du_z}{dr} = \left(\frac{\Delta P}{2\mu L}\right)\left(r - \frac{r_m^2}{r}\right)$ 積分=>$u_z = \left(\frac{\Delta P}{2\mu L}\right)\left(\frac{r^2}{2} - r_m^2 \ln r\right) + c$ (1)

B.C.1 $r = r_i$，$u_z = 0$ 代入(1)式=>$0 = \left(\frac{\Delta P}{2\mu L}\right)\left(\frac{r_i^2}{2} - r_m^2 \ln r_i\right) + c$ (2)

B.C.2 $r = r_0$，$u_z = 0$ 代入(1)式=>$0 = \left(\frac{\Delta P}{2\mu L}\right)\left(\frac{r_0^2}{2} - r_m^2 \ln r_0\right) + c$ (3)

(2)−(3)式 $0 = \left(\frac{\Delta P}{2\mu L}\right)\left[\frac{r_i^2 - r_0^2}{2} - r_m^2 \ln\left(\frac{r_i}{r_0}\right)\right]$ 移項=>$r_m^2 \ln\left(\frac{r_i}{r_0}\right) = \frac{r_i^2 - r_0^2}{2}$

=>$r_m^2 = \frac{r_i^2 - r_0^2}{2\ln\left(\frac{r_i}{r_0}\right)}$ 開平方=>$r_m = \sqrt{\frac{r_i^2 - r_0^2}{2\ln\left(\frac{r_i}{r_0}\right)}}$

〈考題2 − 31〉(104高考三等)(每小題10分，共20分)
有一密度為ρ、黏度為μ之牛頓流體(Newtonian fluid)，因重力沿著垂直平板之表面以層流緩慢流下，假設流體為不可壓縮，且在穩定流動時形成的液膜厚度為δ。(一)試推導液膜中之速度分布$V_z(x)$。(二)液膜中之最大速度與平均速度各為何？
Sol：座標圖與速度分佈畫法如〈類題 2 − 3〉圖八。

(一)由連續方程式 $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$ 不可壓縮流體$\rho = const$

代入上式 =>$\nabla \cdot \vec{V} = 0$ =>$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$

全展流下 $V_x = 0$ $V_y = 0$ 代入上式 =>$\frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$，$V_z = V_{z(x)}$only

$\left[\text{控制體積動量產生之速率}\right] = F_{xg} + F_{xp} + R_x$ (5)

將(2)&(3)&(4)&(5)代入(1)式得：

$$\frac{dP_x}{dt} = \dot{m}_1 \frac{\langle u_{x1}^2 \rangle}{\langle u_{x1} \rangle} - \dot{m}_2 \frac{\langle u_{x2}^2 \rangle}{\langle u_{x2} \rangle} + F_{xg} + F_{xp} + R_x$$

在穩態下動量平衡方程式：

$$\dot{m}_1 \frac{\langle u_{x1}^2 \rangle}{\langle u_{x1} \rangle} - \dot{m}_2 \frac{\langle u_{x2}^2 \rangle}{\langle u_{x2} \rangle} + F_{xg} + F_{xp} + R_x = 0 \quad (\text{x 方向})$$

$$\dot{m}_1 \frac{\langle u_{y1}^2 \rangle}{\langle u_{y1} \rangle} - \dot{m}_2 \frac{\langle u_{y2}^2 \rangle}{\langle u_{y2} \rangle} + F_{yg} + F_{yp} + R_y = 0 \quad (\text{y 方向})$$

$$\dot{m}_1 \frac{\langle u_{z1}^2 \rangle}{\langle u_{z1} \rangle} - \dot{m}_2 \frac{\langle u_{z2}^2 \rangle}{\langle u_{z2} \rangle} + F_{zg} + F_{zp} + R_y = 0 \quad (\text{z 方向})$$

如果流體爲亂流下：$\frac{\langle u^2 \rangle}{\langle u \rangle} \doteqdot \langle u \rangle$

$$\boxed{\begin{aligned} &\dot{m}_1 \langle u_{x1} \rangle - \dot{m}_2 \langle u_{x2} \rangle + F_{xg} + F_{xp} + R_x = 0 \quad (\text{x 方向}) \\ &\dot{m}_1 \langle u_{y1} \rangle - \dot{m}_2 \langle u_{y2} \rangle + F_{yg} + F_{yp} + R_y = 0 \quad (\text{y 方向}) \\ &\dot{m}_1 \langle u_{z1} \rangle - \dot{m}_2 \langle u_{z2} \rangle + F_{zg} + F_{zp} + R_y = 0 \quad (\text{z 方向}) \end{aligned}}$$

(三)機械能平衡方程式、能量平衡方程式、柏努力方程式

巨觀機械能平衡 (由熱力學第一定律或牛頓第二定律導出)

$$\boxed{\frac{P_2 - P_1}{\rho} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g_c} + \frac{g}{g_c}(z_2 - z_1) + \sum F + W_s = 0 \quad \text{機械能平衡方程式}}$$

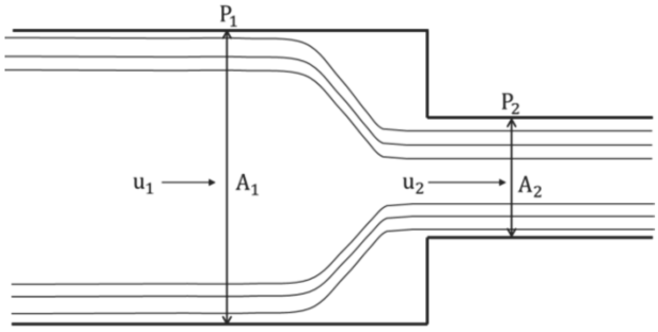
$$\boxed{\dot{m}(H_2 - H_1) + \dot{m}\left(\frac{u_2^2 - u_1^2}{2g_c}\right) + \frac{g}{g_c}(z_2 - z_1)\dot{m} = Q - W_s \quad \text{穩態能量平衡方程式}}$$

這兩個公式使用起來不難，但導衍過程很繁雜，只需了解物理意義與如何使用就足夠，想要了解導衍過程的朋友，可以參考 Bird 原文書。

※有些原文書或參考書會加入α_1和α_2稱作動能修正因子(Kinetic-energy correction factor)，通常題目沒有特別提到我們解題都會將α_1和α_2視爲 1 方便計算，有動能修正因子上面兩式表示如下：

$$\boxed{\frac{P_2 - P_1}{\rho} + \frac{\alpha_2 u_2^2 - \alpha_1 u_1^2}{2g_c} + \frac{g}{g_c}(z_2 - z_1) + \sum F + W_s = 0}$$

$$\boxed{\dot{m}(H_2 - H_1) + \dot{m}\left(\frac{\alpha_2 u_2^2 - \alpha_1 u_1^2}{2g_c}\right) + \frac{g}{g_c}(z_2 - z_1)\dot{m} = Q - W_s}$$



(圖四)管線突然收縮

管線突然收縮的損失$h_{fc} = 0.55\left(1-\frac{A_2}{A_1}\right)\frac{u_2^2}{2g_c}$ ∴ $\boxed{K_c = 0.55\left(1-\frac{A_2}{A_1}\right)}$

K_e和K_c下標代表意思爲 e 爲 expension 擴大；c 爲 contraction 收縮

管線配件之摩擦損失 $\boxed{h_f = K_f\frac{u_1^2}{2g_c}}$

K_f：管件和閥體的損失因子，u_1：管中流向管件的平均速度
如果管線中含有前面所提到的各項摩擦損失之總和爲：

$$\boxed{\sum F = \left(K_p + K_e + K_c + K_f\right)\frac{u^2}{2g_c}}$$

以上資料節錄 McCabe 6-Edition

管線中各種配件摩擦損失表示式整理	
直管	$K_p = 4f\frac{L}{D}$
小管流入大管	$K_e = \left(1-\frac{A_1}{A_2}\right)^2$
大管流入小管	$K_c = 0.55\left(1-\frac{A_2}{A_1}\right)$ (亂流)
	$K_c < 0.1$ (層流)
90^0 肘管	$K_f = 0.75$ (亂流)
T 型管	$K_f = 1.0$ (亂流)
球閥全開	$K_f = 6.0$ (亂流) 損失最大爲球閥
搖擺式單向閥	$K_f = 2.0$ (亂流)

氣層及1/4in的木板所建構而成。如果屋外磚頭的表面溫度80°F。試求：(一)如果空氣層被設定：只會藉由傳導作用來轉換熱量，那麼熱通量(heat flux)是多少$(Btu/hr \cdot ft^2)$？

(二)若空氣層充滿玻璃棉時，則熱通量(heat flux)是多少$(Btu/hr \cdot ft^2)$？

$k_{磚頭} = 0.380\,Btu/hr \cdot ft°F$，$k_{隔音板} = 0.028\,Btu/hr \cdot ft°F$，

$k_{空氣} = 0.015\,Btu/hr \cdot ft°F$，$k_{木板} = 0.120\,Btu/hr \cdot ft°F$，

$k_{玻璃板} = 0.025\,Btu/hr \cdot ft°F$(計算至小數點後第 4 位，以下四捨五入)

Sol：

(一)$\frac{q}{A} = \frac{T_1 - T_5}{\frac{\Delta x_1}{k_1} + \frac{\Delta x_2}{k_2} + \frac{\Delta x_3}{k_3} + \frac{\Delta x_4}{k_4}} = \frac{80-30}{\frac{4/12}{0.38} + \frac{0.5/12}{0.028} + \frac{3.625/12}{0.015} + \frac{0.25/12}{0.12}} = 2.2048\left(\frac{Btu}{hr \cdot ft^2}\right)$

(二)$\frac{q}{A} = \frac{T_1 - T_5}{\frac{\Delta x_1}{k_1} + \frac{\Delta x_2}{k_2} + \frac{\Delta x_3}{k_3} + \frac{\Delta x_4}{k_4}} = \frac{80-30}{\frac{4/12}{0.38} + \frac{0.5/12}{0.028} + \frac{3.625/12}{0.025} + \frac{0.25/12}{0.12}} = 3.4195\left(\frac{Btu}{hr \cdot ft^2}\right)$

※溫度分佈畫法可參考上面題型，大致上平板串聯排列圖形都是相似的！

※此題摘錄於 3W 習題 Problem 15.1！

⟨考題 $6-14$⟩(105 地方特考)(9/6/9 分)

平板法爲測定材料之導熱係數之一種方法。使用平板法測定材料的導熱係數時，平板材料的一側用電熱器加熱，另一側用冷卻水通過夾層將熱量移走。同時用熱電偶測得平板兩側的表面溫度，所加熱量則由電熱器的電壓和電流算出。當平板材料的導熱面積爲$0.02m^2$，厚度爲$0.01m$時，測得的數據如下：

電熱器	電壓，V	140	114
	電流，A	2.8	2.28
平板材料表面溫度，℃	高溫側	300	200
	低溫側	100	50

請回答下列問題：(一)材料的平均導熱係數。(二)若該材料的導熱係數符合如下關係：$k = k_0(1 + at)$，t爲溫度℃。式中k_0及a值爲若干？(三)寫出此方法量測導熱係數之三種可能誤差。

Sol：(一)材料 1：$Q_1 = I_1 V_1 = 2.8 \times 140 = 392(W)$

材料 2：$Q_2 = I_2 V_2 = 2.28 \times 114 = 260(W)$

$Q_1 = k_1 A \frac{\Delta T}{\Delta x}$ =>$392 = k_1(0.02)\frac{(300-100)}{0.01}$ =>$k_1 = 0.98\left(\frac{W}{m\cdot k}\right)$

$Q_2 = k_2 A \frac{\Delta T}{\Delta x}$ =>$260 = k_2(0.02)\frac{(200-50)}{0.01}$ =>$k_2 = 0.867\left(\frac{W}{m\cdot k}\right)$

$\bar{k} = \frac{k_1+k_2}{2} = \frac{0.98+0.867}{2} = 0.92\left(\frac{W}{m\cdot k}\right)$

(二) $t_1(\text{average}) = \frac{300+100}{2} = 200(℃)$；$t_2(\text{average}) = \frac{200+50}{2} = 125(℃)$

代入熱傳導係數關係式 $0.98 = k_0(1+200a)$ (1)

$0.867 = k_0(1+125a)$ (2)

將(1)除以(2)式 =>$1.13 = \frac{1+200a}{1+125a}$ =>$a = 2.2\times10^{-3}(k^{-1})$

將a值代回(1)或(2)式=>$k_0 = 0.68\left(\frac{W}{m\cdot k}\right)$

(三)(1)一般熱導係數儀多採取破壞式測試方法，測試後無法保持樣品原貌。(2)熱係數儀的量測結果多有漂移現象，且測試時間達數小時。(3)僅能測試一定尺寸大小的樣品。(4)薄膜厚度太薄，無法量測。

(5)一類儀器僅能測試熱導係數$10\,W/m\cdot k$以內的低熱導材料，如高分子材料；另一類則是僅適合量測熱導係數$10\,W/m\cdot k$以上的高熱導材料，如金屬材料，有範圍限制。

※此題摘錄於張學民、張學義編著單元操作與題解，熱傳單元中習題 7.1。

(2)-(3)式$T - T_i = c_1 \ln\left(\frac{r}{r_i}\right)$ (6)；將(5)代入(6)式=>$\frac{T-T_i}{T_0-T_i} = \frac{\ln\left(\frac{r}{r_i}\right)}{\ln\left(\frac{r_0}{r_i}\right)}$

(二)$Q|_{r=r_0} = -kA\frac{dT}{dr}\Big|_{r=r_0} = -k(2\pi r_0 L)T_1\frac{T_0-T_i}{\ln\left(\frac{r_0}{r_i}\right)}\frac{1}{r_0} = 2\pi kL\frac{(T_i-T_0)}{\ln\left(\frac{r_0}{r_i}\right)}$

=>$q = \frac{Q}{L} = \frac{2\pi k(T_i-T_0)}{\ln\left(\frac{r_0}{r_i}\right)} = \frac{2\pi(0.4)(350-300)}{\ln\left(\frac{2}{1}\right)} = 181.2\left(\frac{W}{m}\right)$

〈考題 7 − 27〉(101 化工技師)(20 分)

一環狀壁(annular wall)之內半徑及外半徑分別爲r_0及r_1，其上之壁溫分別爲T_0及T_1($T_0 > T_1$)。此管壁之熱傳導度(thermal conductivity)隨溫度線性變化，從內管壁之k_0變化至外管壁之k_1，環狀壁之長度爲 L，請求解經管壁之熱流量(heat flow through the wall)。

Sol：Shell-balance：$2\pi rL \cdot q_r|_r - 2\pi rL \cdot q_r|_{r+\Delta r} = 0$同除以$2\pi L \cdot \Delta r$ 令$\Delta r \to 0$

=>$\frac{d(r \cdot q_r)}{dr} = 0$ (1) Fourier Law $q_r = -k_1\frac{dT}{dr}$ 代入(1)式=>$\frac{\partial}{\partial r}\left(k_1 r\frac{\partial T}{\partial r}\right) = 0$ (2)

假設$k_1 = k_0(1+\beta T)$ 代入(2)式$\frac{\partial}{\partial r}[k_0(1+\beta T)]r\frac{\partial T}{\partial r} = 0$

β(溫度係數)：一般金屬材料爲負值；k_0(特定物質的熱導度)；k_1(特定物質實驗出的熱導度值)

=>$[k_0(1+\beta T)]\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{c_1}{r}$ 再次積分=>$k_0 T + k_0\frac{\beta}{2}T^2 = c_1 \ln r + c_2$ (3)

B.C.1 $r = r_0$ $T = T_0$ 代入(3)式=>$k_0 T_0 + k_0\frac{\beta}{2}{T_0}^2 = c_1 \ln r_0 + c_2$ (4)

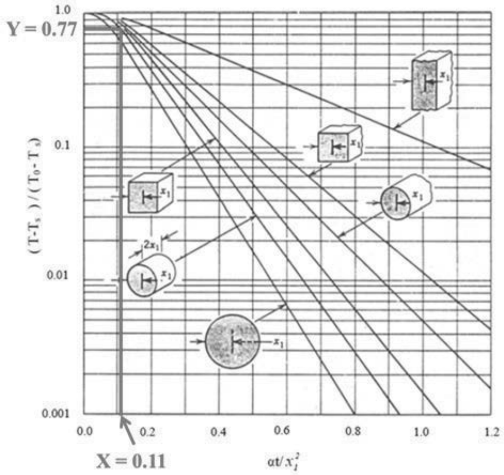
B.C.2 $r = r_1$ $T = T_1$ 代入(3)式=>$k_0 T_1 + k_0\frac{\beta}{2}{T_1}^2 = c_1 \ln r_1 + c_2$ (5)

(5)-(4)式$k_0(T_1 - T_0) + \frac{\beta}{2}k_0\left({T_1}^2 - {T_0}^2\right) = c_1 \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)$

=>$c_1 = \frac{k_0(T_1-T_0)+\frac{\beta}{2}k_0\left({T_1}^2-{T_0}^2\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}$ (6)

又$q_r = -k_1 A\frac{dT}{dr} = -[k_0(1+\beta T)](2\pi rL)\frac{dT}{dr} = -(2\pi rL)\frac{c_1}{r}$

⟨考題 8 − 12⟩(92 地方特考)(5/15 分)
如圖所示是啓始溫度爲T_0的各種固體的中心溫度隨傅利葉數(Fourier number)變化的情形。在熱傳過程中，固體表面溫度皆維持在固定溫度T_s。有一長度爲0.1m，直徑爲0.1m的圓柱體($\alpha = 5.95 \times 10^{-7} m^2/s$)，其啓始溫度爲292K。將此圓柱置入溫度爲373K的水蒸氣中，蒸氣在其表面上冷凝且知對流熱傳係數h爲$8500 W/m^2K$。試問：(一)附圖是否適合於求解上述問題。(二)試求圓柱體中心溫度達310K所需的時間。



Sol：

(一)$Bi = \frac{h\left(\frac{V}{A}\right)}{k} = \frac{h\left(\frac{\pi}{4}D^2\right)}{k\left(\pi DL + 2\cdot\frac{\pi}{4}D^2\right)}$ 上下同除以πD

=>$Bi = \frac{h\left(\frac{D}{4}L\right)}{k\left(L+\frac{D}{2}\right)} = \frac{8500\left(\frac{0.1\times0.1}{4}\right)}{k\left(0.1+\frac{0.1}{2}\right)} < 0.1$，當 Bi<0.1 下可以用公式法解之$\ln\frac{T-T_s}{T_0-T_s} = -\frac{hA}{\rho V C_p}$，在 Bi>0.1 下外熱阻可以忽略，必須以 Fourier second law $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ 出發導正的經驗圖表解之，此圖代表各種固體形狀中心溫度和時間的變化，由$\frac{T-T_s}{T_0-T_s}$求得數值查所對應的形狀固體可得 x 軸的(Fourier number) $F_0 = \frac{\alpha t}{x^2}$,再從$F_0$中求得固體到達中心溫度所需的時間。

(二)$Y = \frac{T-T_s}{T_0-T_s} = \frac{310-373}{292-373} = 0.778$ 往左查圓柱體得

$X = 0.11 = F_0$ =>$F_0 = \frac{\alpha t}{x^2}$ =>$0.11 = \frac{5.95\times10^{-7}t}{\left(\frac{0.1}{2}\right)^2}$ =>$t = 462(sec)$

⟨考題8 − 13⟩(94地方特考)(5分)
畢歐數(Biot number) Sol：請參考重點整理。

⟨考題8 − 14⟩(95化工技師)(各10分)
有一牛頓流體其溫度爲T_0流經一圓管，其流動型態爲柱狀流(Plug flow)，在管壁

〈類題 9－4〉初始溫度爲 70°F之塑膠平板置於溫度爲 250°F之二壓板(platens)之間。平板厚度爲 1.0in (一)欲加熱此平板平均溫度至 210°F，需時多久？(二)在此時間內，每平方英呎之表面若干 Btu 的熱量輸入至塑膠平板內？此固體平板之密度爲 $56.2\mathrm{lbm/ft^3}$，導熱度爲 $0.075\mathrm{Btu/ft\cdot hr\cdot °F}$，比熱爲 $0.4\mathrm{Btu/lbm\cdot °F}$。(McCabe 例題 10.5)

Sol：

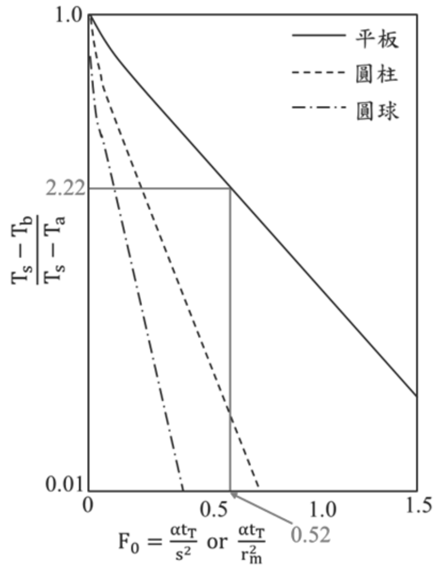
(一) $Y=\frac{T_s-T_b}{T_s-T_a}=\frac{250-210}{250-70}=0.222$

往右對平板表示線再往下查 X 軸=>$X=F_0=0.52$

$\alpha=\frac{k}{\rho C_p}=\frac{0.075\mathrm{Btu/ft\cdot hr\cdot °F}}{56.2\frac{\mathrm{lbm}}{\mathrm{ft^3}}\times 0.4\frac{\mathrm{Btu}}{\mathrm{lbm\cdot °F}}}=3.3\times10^{-3}\left(\frac{\mathrm{ft^2}}{\mathrm{hr}}\right)$;$s=\frac{1}{12\times2}=0.0416(\mathrm{ft})$

=>$0.52=\frac{3.3\times10^{-3}t}{(0.0416)^2}$ =>$t=0.27(\mathrm{hr})$

(二)$q=s\rho C_p(T_b-T_a)=0.0416\times56.2\times0.4(210-70)=131\left(\frac{\mathrm{Btu}}{\mathrm{ft^2}}\right)$



=>$\frac{\partial C_A}{\partial t} = D_{AB}\underline{\nabla}^2 C_A$ Fick's 2nd law 和上題(一)結果相同

⟨考題 13－5⟩(105 經濟部特考)(20 分)
辦公室地板積水形成 0.02 公分厚的薄膜，水溫恆爲 24℃，空氣溫度亦爲 24℃，壓力爲 1atm，絕對溼度爲每千克乾燥空氣含 0.002 千克之水蒸汽，積水蒸發然後擴散通過0.6公分厚之氣膜。已知在24℃下飽和溼度爲每千克乾空氣含0.0189千克之水蒸汽，問耗時多少小時，地板上之水始能完全蒸發？已知：(1).以 $1m^2$ 表面積爲基準。(2). 298k，1atm 下，水蒸氣在空氣中之擴散係數爲 $0.260cm^2/sec$(3). 空氣分子量 29；水分子量：18。(計算至小數點後第四位，以下四捨五入)
Sol：假設水蒸氣爲 A，乾空氣爲 B

Fick's 1st law =>$N_A = -CD_{AB}\frac{dy_A}{dz} + y_A(N_A + \cancel{N_B})$(2) (∵B 靜止不動$N_B \doteqdot 0$)

=>$N_A - N_A y_A = -CD_{AB}\frac{dy_A}{dz}$ =>$N_A = \frac{-CD_{AB}}{1-y_A}\frac{dy_A}{dz}$

=>$N_A\int_0^{\delta} dz = -CD_{AB}\int_{y_{A1}}^{y_{A2}}\frac{dy_A}{1-y_A}$ 令$u = 1 - y_A$ =>$du = -dy_A$

=>$N_A = \frac{CD_{AB}}{\delta}\ln\left(\frac{1-y_{A2}}{1-y_{A1}}\right) = \frac{CD_{AB}}{\delta}\frac{y_{A1}-y_{A2}}{y_{BM}}$ ∵ $y_{BM} = \frac{y_{A1}-y_{A2}}{\ln\left(\frac{1-y_{A2}}{1-y_{A1}}\right)}$

蒸發水體積(一平方公尺) $= (1m^2)\left(\frac{0.02}{100}m\right) = 2\times10^{-4}(m^3)$

蒸發水質量$m_{H_2O} = \rho_{H_2O}\cdot V_{H_2O} = \left(1000\frac{kg}{m^3}\right)(2\times10^{-4}m^3) = 0.2(kg)$

蒸發水莫耳數$= \frac{0.2kg}{18\frac{kg}{kgmol}} = 0.0111(kgmol)$

=>每平方公尺蒸發水的莫耳數$= 0.0111\left(\frac{kgmol}{m^2}\right)$

計算每千克乾空氣的水蒸氣莫爾分率：

$0.0189\frac{kgH_2O}{kgAiR}\times\frac{kgmolH_2O}{18kgH_2O}\times\frac{29kgAiR}{kgmolAiR} = 0.0304\left(\frac{kgmolH_2O}{kgmolAiR}\right)$

=>$y_{A1} = \frac{0.0304}{1+0.0304} = 0.0295$

※分母代 1 意思爲$\left(1\frac{\text{kgmolH}_2\text{O}}{\text{kgmolAiR}}\right)$，每千克莫爾的乾空氣含 1 千克莫爾水。

$$0.002\frac{\text{kgH}_2\text{O}}{\text{kgAiR}}\times\frac{\text{kgmolH}_2\text{O}}{18\text{kgH}_2\text{O}}\times\frac{29\text{kgAiR}}{\text{kgmolAiR}}=3.22\times10^{-3}\left(\frac{\text{kgmolH}_2\text{O}}{\text{kgmolAiR}}\right)$$

$$=>y_{A2}=\frac{3.22\times10^{-3}}{1+3.22\times10^{-3}}=3.2\times10^{-3}$$

$$=>y_{BM}=\frac{y_{A1}-y_{A2}}{\ln\left(\frac{1-y_{A2}}{1-y_{A1}}\right)}=\frac{0.0295-3.2\times10^{-3}}{\ln\left(\frac{1-3.2\times10^{-3}}{1-0.0295}\right)}=0.983$$

$$=>C=\frac{P}{RT}=\frac{1\text{atm}}{\left(0.082\frac{\text{atm}\cdot\text{m}^3}{\text{kgmol}\cdot\text{k}}\right)[(24+273)\text{k}]}=0.041\left(\frac{\text{kgmol}}{\text{m}^3}\right)$$

$$=>D_{AB}=\left(0.26\frac{\text{cm}^2}{\text{sec}}\right)\left(\frac{1\text{m}}{100\text{cm}}\right)^2\left(\frac{3600\text{sec}}{1\text{hr}}\right)=0.0936\left(\frac{\text{m}^2}{\text{hr}}\right)$$

$$N_A=\frac{CD_{AB}}{\delta}\frac{y_{A1}-y_{A2}}{y_{BM}}=\frac{(0.041)(0.0936)}{\left(\frac{0.6}{100}\right)}\frac{(0.0295-3.22\times10^{-3})}{0.983}=0.0171\left(\frac{\text{kgmol}}{\text{m}^2\cdot\text{hr}}\right)$$

$$=>t=\frac{\left(0.0111\frac{\text{kgmol}}{\text{m}^2}\right)}{\left(0.0171\frac{\text{kgmol}}{\text{m}^2\cdot\text{hr}}\right)}=0.6491(\text{hr})$$

※此題摘錄於葉和明的單元操作與輸送現象(三)例題 24-1。

(五)填充床內的流體流動：

以一個中空塔(tower)中裝入一顆顆的填充物，流體由底部進入由頂端流出，也可逆向操作，這種裝置常用於吸收塔，在蒸餾中也可當反應器使用時，這些填充物就是類似流體化床使用觸媒。

分析填充床內流體流動前，必須有假設來簡化問題：

(1) 填料在流體化床內填充相當均勻。

(2) 在流體化床內無溝流現象(channeling)現象，也就是流體不會抄近路，專循某個路徑走，而某些地方流不到。

(3) 床的直徑比填料尺寸大很多，這表示床壁對流體流動的影響可以忽略。

床的空隙分率(Void fraction) $\boxed{\varepsilon = \dfrac{\text{空隙體積}}{\text{床體積(空隙體積與填料體積的總和)}}}$

填料的比表面積$a_V(m^2 \cdot m^{-3})$ $\boxed{a_V = \dfrac{S_p}{V_p} = \dfrac{\text{填料表面積}}{\text{填料體積}}}$ (1)

圓球填料定義 $\boxed{a_V = \dfrac{\pi D_p^2}{\frac{\pi}{6} D_p^3} = \dfrac{6}{D_p} \Rightarrow D_p = \dfrac{6}{a_V}}$ (2)

上面都是用以表示填料爲圓球顆粒，如果以床爲基準的比表面積爲：

$$\boxed{a = \frac{\text{填料表面的和}}{\text{床體積}} = \frac{S_p}{V_p}(1-\varepsilon) = a_V(1-\varepsilon) = \frac{6}{D_p}(1-\varepsilon)} \quad (3)$$

階間速度(interstitial velocity)$u(m/sec)$：在填充床空隙中實際的流體流速。

表觀速度(superficial velocity)$u'(m/sec)$：在所有條件不變下，填充床中無填充物下的流體流速。

填充物拿掉後，可供流動的面積會增加，但相對的速度會慢了下來 $\Rightarrow u \gg u'$

$\Rightarrow u' \cdot A = u \cdot A \cdot \varepsilon$ (式中的 A 代表填充床的面積)

$\Rightarrow \boxed{u' = u \cdot \varepsilon}$ (4)

水力半徑的觀念在填充床可以定義爲以下表示：

$$\boxed{r_H = \frac{\text{床中空隙體積/床體積}}{\text{床中填充物被水潤濕的面積/床體積}} = \frac{\varepsilon}{a}} \quad (5)$$

將(3)代入(5)式 $\Rightarrow \boxed{r_H = \dfrac{\varepsilon \cdot D_p}{6(1-\varepsilon)}}$ (6) Re 的定義爲$Re = \dfrac{D_{eq} u \rho}{\mu} = \dfrac{(4 r_H) u \rho}{\mu}$ (7)

u爲階間速度(interstitial velocity)

由(4)&(6)代入(7)式=> $\boxed{Re = \dfrac{\left[4 \cdot \frac{\varepsilon \cdot D_p}{6(1-\varepsilon)}\right] \cdot \left(\frac{u'}{\varepsilon}\right) \cdot (\rho)}{\mu} = \dfrac{4}{6(1-\varepsilon)} \cdot \dfrac{D_p u' \rho}{\mu}}$ (8)

⟨考題17 − 17⟩(102高考三等)(6分)

試說明流體流過粒子床之溝流(channeling)現象，且由粒子之受力分析說明最小流體化速度(minimum fluidization velocity)現象。

Sol：溝流現象：流體在粒子床中會抄近路，專門循某個地方流動，而某些地方流體無法通過。流體化速度：可參考重點整理說明。

⟨考題 17 − 18⟩(102 高考三等)(6 分)

對於以重力沉降(gravitational settling)配合 Stokes 定律來量測粒子粒徑的方法，其運用上有何限制？

Sol：$V_t = \frac{D_p^2 \cdot g(\rho_p - \rho)}{18\mu}$ 限制(1)圓球粒子(2)粒子沉降必須到達終端速度(3)因爲 $Re_{(p)} < 1.0$ 所以必須符合在Stoke′s law範圍内。

⟨考題17 − 19⟩(102經濟部特考)(3分)

某鋼球在某牛頓流體中的終端速度(Terminal Velocity)爲 2m/s，如果鋼球直徑變爲 2 倍，且其他條件不變，則其終端速度爲多少？假設爲 Creeping flow。

Sol：Creeping flow 下 $V_t = \frac{D_p^2 \cdot g(\rho_p - \rho)}{18\mu}$ Stoke′s law

$V_t \propto D_p^2 \Rightarrow \frac{V_t}{V_t'} = \frac{D_{p1}^2}{D_{p2}^2} \Rightarrow \frac{2}{V_t'} = \frac{D_{p1}^2}{(2D_{p1})^2} \Rightarrow V_t' = 8\left(\frac{m}{s}\right)$

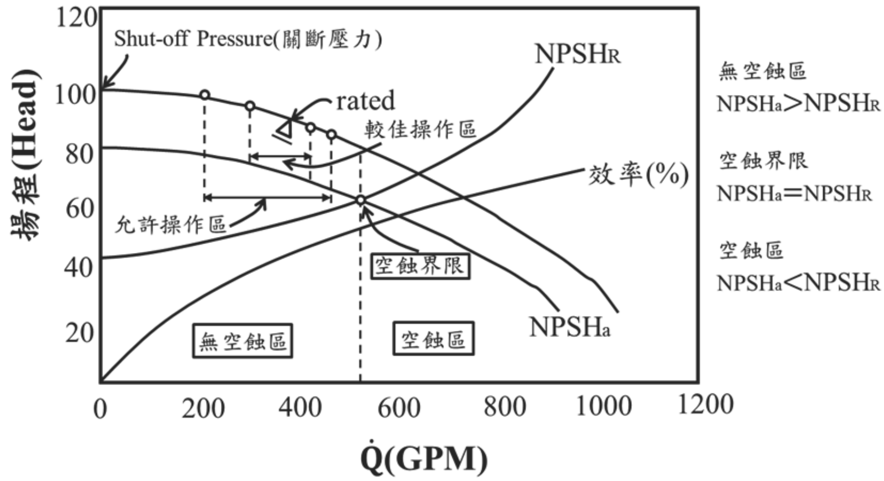
⟨考題17 − 20⟩(103地方特考)(各10分)

有一離子交換樹脂粒子(ion-exchange bead)之填充床，擬以20℃水反洗(backwashing)方式移除粒子上之積垢物。若這樹脂粒子爲球形狀，粒徑0.001m，密度1500kg/m³，粒子床高1.5m，粒子床孔隙度(porosity)0.4。而20℃水之密度爲1000kg/m³，黏度爲1.0cp

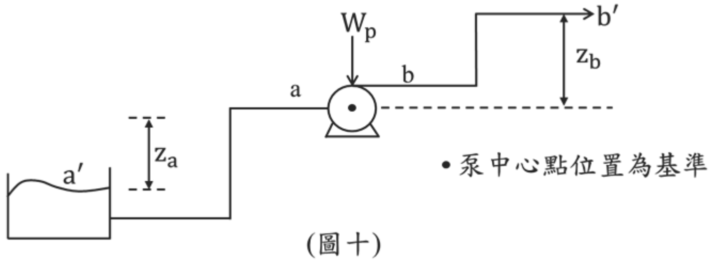
($= 10^{-3}$ kg/m · s)。試求：(一)其最小流體化速度(minimum fluidization velocity)。(二)使粒子床膨脹20%時所需之流體速度。

備註：流體流過小顆粒填充床之壓降關係式$\frac{\Delta P}{L} = 150\frac{\mu V}{D_p^2}\frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3}$

被關斷時可能造成破管的情況。



(七)發展揚程(Developed Head)，對點a′與點b′做平衡，如圖十。



(圖十)

$H_s = H_a = \frac{P_a}{\rho} + \frac{\alpha u_a^2}{2g_c} = \frac{P_a'}{\rho} - \frac{g}{g_c}Z_a - F_s$ 吸入端高度差(Suction Head)

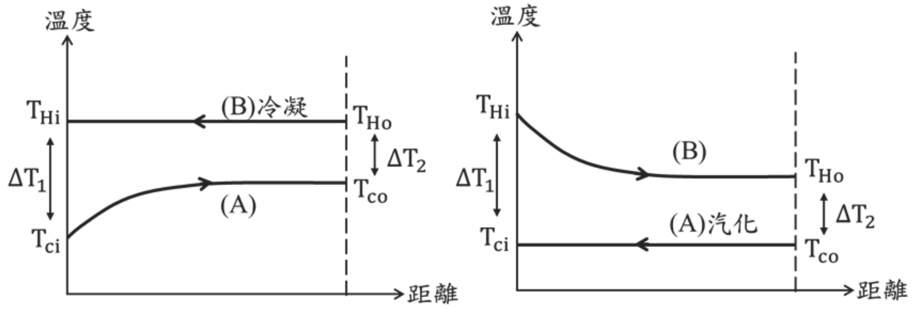
$H_d = H_b = \frac{P_b}{\rho} + \frac{\alpha u_b^2}{2g_c} = \frac{P_b'}{\rho} + \frac{g}{g_c}Z_b + F_d$ 排出端高度差(Discharge Head)

$\Delta H = H_d - H_s = \left(\frac{P_b'}{\rho} + \frac{g}{g_c}Z_b + F_d\right) - \left(\frac{P_a'}{\rho} - \frac{g}{g_c}Z_a - F_s\right)$ 總揚程(Total Head)

$W_P = \frac{H_d - H_s}{\eta} = \frac{W_s}{\eta}$ (F_s吸入端摩擦損失，F_d排出端摩擦損失)

若以高度表示：$\boxed{H_d - H_s = \left[\frac{P_b'}{\rho g} + Z_b + \frac{g_c}{g}F_d\right] - \left[\frac{P_a'}{\rho} - \frac{g}{g_c}Z_a - \frac{g_c}{g}F_s\right]}$

$(\mathrm{NPSH})_a = H_s - \frac{P_V}{\rho g} = \frac{P_a - P_V}{\rho g} + \frac{\alpha u_a^2}{2g_c} = \frac{g_c}{g}\left(\frac{P_a' - P_V}{\rho} - F_s\right) - Z_a$ 淨正吸引落差



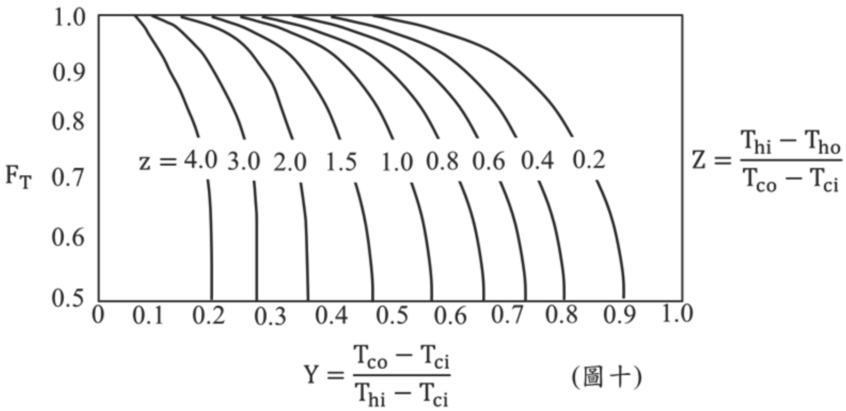
當(B)流體被冷凝，(A)液體吸收其潛熱。 (A)流體汽化，(B)流體供給其潛熱。

(圖九)

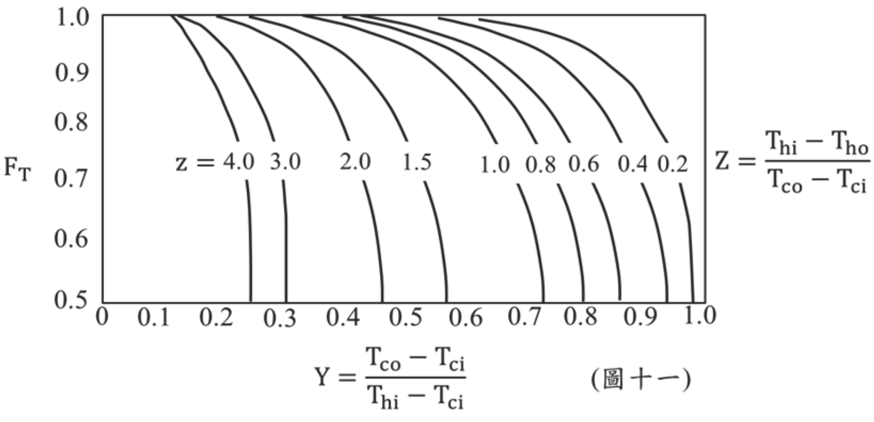
(四)殼管式換熱器修正係數

使用時機：計算多程之殼管式換熱器，必須乘上此係數F_T作爲修正。

$\boxed{Q = F_T U_0 A_0 \Delta T_{lm}}$；$F_T = f\left(Y，Z\right)$，$F_T$是 Y 和 Z 的函數。



(圖十：1-2 殼管式換熱器)

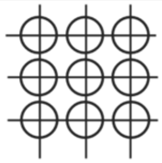
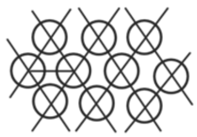


(圖十一：2-4 殼管式換熱器)

F_T(修正係數)的求法：先確定是哪種形式的殼管式換熱器(ex：1-2 or 2-4)，

(六)殼管式換熱器構造：

管束排列方式：

排列方式	示意圖	優點	缺點
正方形		管外積垢清理方便	對流熱傳係數較小
正三角形		單位面積管子較多，殼側流體可產生擾流，熱傳效果較好。	管外積垢，不容易清理。

1.殼體、管束、擋板、管板等所組成。

2.在管束內流動的流體叫管側流體，在管束與殼體間流動者叫殼側流體。

3.管束的總表面積即爲熱傳面積A_0。

(七)有效度(effectiveness,ε)計算

使用時機：當只有進口溫度T_{Hi}，T_{ci}已知，但出口溫度T_{Ho}，T_{co}未知時，必須利用換熱器有效度計算方式才能解題。

$$\boxed{\varepsilon=\frac{q}{C_{min}(T_{Hi}-T_{ci})}=\frac{\text{實際傳送熱量}}{\text{最大可能傳送熱量}}<1.0} \quad \boxed{NTU=\frac{U_0A_0}{C_{min}}}$$

NTU傳遞單元數(number of transfer units)：爲熱交換器設計大小的指標，或稱換熱器熱傳性能大小(thermal size)，從公式內可得知爲換熱器面積A_0、總包熱傳係數U_0與最小熱容量C_{min}之間的組合。

1.$NTU>5$時，流體出口溫度幾乎接近管壁溫度，在此情況下無論管路增長，都無法增加熱傳，反而會增加成本。

2.NTU很小時，代表管路長度增長可增加熱傳，但必須考量成本。

3.一般NTU在設計範圍大約在$NTU<4.0$，但在密集式換熱器則可能超過。

4.有效度(effectiveness,ε)也可稱換熱器效率，爲無因次。

※順向流與逆向流有效度(effectiveness,ε)推導

順向流有效度推導：

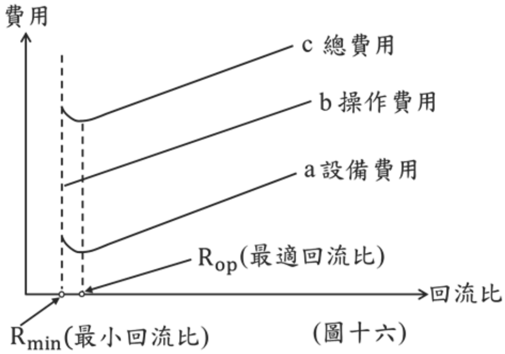
x'_n(離開第 n 板特定位置之液體組成)，x_n^*(和離開第 n 板特定位置之蒸氣y_n成平衡之液體濃度)，x'_{n-1}(離開第 n-1 板特定位置之液體組成)

(十)蒸餾塔費用和回流比的關係(圖十六)。

(1)使總費用爲最低時之回流比稱最適回流比(optimum reflux ratio)，

(2)回流比增加，所需的板數小，由 a 線得知設備費用相對降低。

(3)回流比增加到某值，雖板數減少，但塔中流體流率增加，塔徑需相對提高，由 a 線得知設備費用隨回流比增加而增加。



(圖十六)

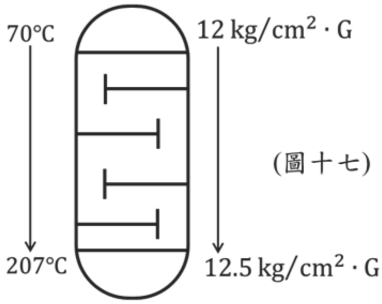
(4)回流比增加，會增加再沸器中的水蒸汽用量和冷凝器中冷媒的用量，由 b 線得知操作費用隨回流比增加而增加。

(5)由 c 線得知 $\boxed{\text{總費用} = \text{設備費用} + \text{操作費用}}$，當 c 的曲線最低爲總費用最少，所對應之回流比稱爲最適回流比，通常爲最小回流比的 1.2-1.5 倍。

$\boxed{R_{op} = 1.2\sim1.5R_{min}}$

(十一)蒸餾塔中溫度與壓力之分佈

蒸餾塔溫度越底部溫度越高，壓力也是越底部壓力越高，如(圖十七)。蒸餾塔效率介於 10%~90%之間，例如：原油蒸餾塔上中下各區效率不同，上層約 70%、中層約 60%、下層約 50%。



(圖十七)

(十二)彭川-索爾瑞法(Ponchon-Savarit method)

定義：利用質量平衡和能量平衡，按加成點和減出點原理逐板分析二成份系蒸餾之圖解法。

缺點：使用焓濃度圖不易獲得，實用上受限，計算法須借助試誤法的繁雜計畫，除非以電腦計算或模擬軟體才可簡化。

〈考題$26-44$〉(101化工技師)(20分)

一批粗戊烷(crude pentane)包含15mole %正丁烷(n-butane)及85mole %正戊烷(n-pentane)，如以大氣壓力下簡單之批次蒸餾(batch distillation)去除90%的正丁烷，剩下液體(remaining liquid)之成分爲何？平均相對揮發度(relative volatility)可假設爲3.5。

Sol：設溶液中正丁烷爲n_A，正戊烷爲n_B，氣化後爲dn_A和dn_B

$\alpha_{AB}\left(相對揮發度\right)=\frac{y_A/x_A}{y_B/x_B}$ (1) $x_A=\frac{n_A}{n_A+n_B}$ ；$x_B=\frac{n_B}{n_A+n_B}$ (2)

$dn_A=\frac{dn_A}{dn_A+dn_B}$；$dn_B=\frac{dn_B}{dn_A+dn_B}$ (3)，將(2)&(3)代入(1)式中

$=>\alpha_{AB}=\frac{dn_A/n_A}{dn_B/n_B}$ $=>\frac{dn_A}{n_A}=\alpha_{AB}\frac{dn_B}{n_B}$ $=>\int_{n_{A0}}^{n_A}\frac{dn_A}{n_A}=\alpha_{AB}\int_{n_{B0}}^{n_B}\frac{dn_B}{n_B}$

$=>\ln\left(\frac{n_A}{n_{A0}}\right)=\alpha_{AB}\ln\left(\frac{n_B}{n_{B0}}\right)$ 兩邊取e $=>\left(\frac{n_A}{n_{A0}}\right)=\left(\frac{n_B}{n_{B0}}\right)^{\alpha_{AB}}$

$=>\left(\frac{n_B}{n_{B0}}\right)=\left(\frac{n_A}{n_{A0}}\right)^{\frac{1}{\alpha_{AB}}}$ 已知$n_{A0}=0.15\text{mol}$；$n_{B0}=0.85\text{mol}$

$=>n_A=n_{A0}(1-0.9)=0.15(1-0.9)=0.015(\text{mol})$

$=>\left(\frac{n_B}{0.85}\right)=\left(\frac{0.015}{0.15}\right)^{\frac{1}{3.5}}$ $=>n_B=0.44(\text{mol})$

$=>n=n_A+n_B=0.015+0.44=0.455(\text{mol})$

$=>x_A=\frac{n_A}{n}=\frac{0.015}{0.455}=0.033$；$x_B=1-x_A=1-0.033=0.967$

※也可使用銳雷方程式(Rayleigh equation)求解，結果相同，讀者可自己練習。

〈考題$26-45$〉(102高考三等)(6分)

說明板式蒸餾塔(plate distillation tower)之倒瀉(weeping)及泛溢(flooding)等現象。

Sol：倒瀉：塔內蒸氣量不足，造成蒸氣上升力量不夠，液體不走下降管而由篩孔處流下，使得分離效果變差。

泛溢：當氣體流速過高，被挾帶到上一層板(tray)的液沫流速增加使板上液層增厚，而液層厚度增加時又會加重液沫挾帶，反覆的惡性循環，使得液體充滿全塔，稱挾帶泛溢。

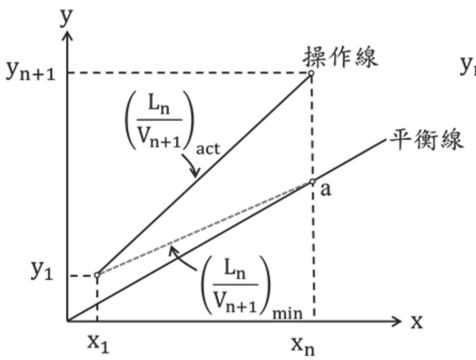
※另一種是下降管(downcomer)通過能力限制所引起，稱溢流泛溢。

當氣體流速過高，氣體通過板(tray)的壓降相對升高，增加至某一程度使下降管內

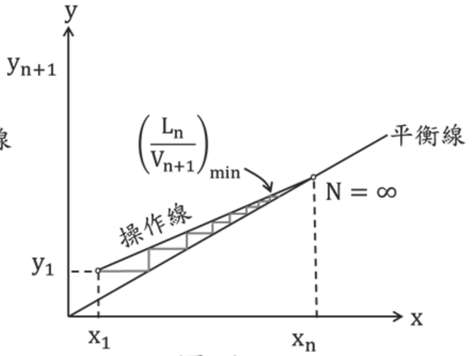
操作線，如此反覆可得理論板數約爲 4.2 板，由(圖三)(圖四)比較得知，很明顯的效率降低，理論板數是往上增加的。

(四)吸收操作極限表示圖

$(L_n/V_{n+1})_{act}$爲實際操作線 o.p(operating line)斜率，當斜率下降至平衡線交叉於 a 點，此點稱夾點(pinch point)，此時爲最小操作線的氣液比表示爲$(L_n/V_{n+1})_{min}$如(圖五)；斜率持續下降時則無法達到X_n值，此時使氣相中氣體溶質無法轉移至液相，因氣相流量固定$V_{n+1} = const$，液相流量L_n減少，理論板數爲無窮多$N = \infty$如圖六，此時吸收效果極差，此外，最小氣液比時因其塔底之推動力爲零，因此需要無限長之吸收塔，但在實際吸收塔中液體流率必定大於此最低值才能達到所需效果，實際上操作線會是微曲線，但因濃度低時 V 相與 L 相流率幾乎爲常數，就像我們後面的解題過程以質量平衡出發，但需以惰性氣體V_s與惰性液體L_s表示之，整個氣液比斜率$(L_s/V_s)_{act} = const$，在氣液比斜率爲常數當然是直線了！



(圖五)



(圖六)

另外，在逆流吸收塔之經濟考量上，當減少$(L_n/V_{n+1})_{act}$比值，雖可得較佳的吸收效果(即X_n值變高)，但需要較大之吸收塔(即需要較高之固定成本)；相反地，增加$(L_n/V_{n+1})_{act}$比值，雖然需要較小之吸收塔(因其有推動力存在)，但所得產物必定較稀薄，增加了氣提以回收溶質的困難(即需要較高之操作成本)，因此最適之液體流率可由固定成本和操作成本兩者之平均值得到。

(五)填充塔的質量平衡求操作線斜率(3W 原文書方式)

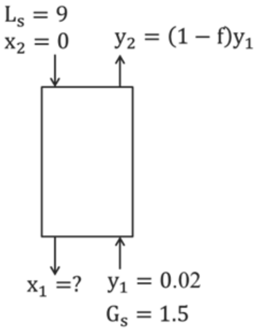
1.逆流式：總質量平衡 $G_1 + L_2 = G_2 + L_1$

對欲吸收成分作質量平衡 $G_1y_1 + L_2x_2 = G_2y_2 + L_1x_1$ (1)

L_s惰性液體流量；G_s惰性氣體流量

$H_{oy}=\frac{V}{K_ya}=1.5(2.19)=3.285(m)$

$y_1=0.02$，$y_1^*=2.7x_1=2.7(3.3\times10^{-3})=8.91\times10^{-3}$；$y_1-y_1^*=0.011$
$y_2=2\times10^{-4}$，$y_2^*=2.7x_2=0$；$y_2-y_2^*=2\times10^{-4}$
$(y-y^*)_M=\frac{(y_1-y_1^*)-(y_2-y_2^*)}{\ln\left(\frac{y_1-y_1^*}{y_2-y_2^*}\right)}=\frac{0.011-2\times10^{-4}}{\ln\left(\frac{0.011}{2\times10^{-4}}\right)}=2.7\times10^{-3}$



$N_{Oy}=\frac{y_1-y_2}{(y-y^*)_M}=\frac{0.02-2\times10^{-4}}{2.7\times10^{-3}}=7.3$

$Z_T=H_{Oy}\cdot N_{Oy}=3.285(7.3)=23.98(m)$

(二)$\%=\frac{\frac{1}{k_ya}}{\frac{1}{K_ya}}\times100\%=\frac{\frac{1}{0.9}}{2.19}\times100\%=50.7(\%)$

(三)吸收操作線的最小氣液比可表示爲：$\left(\frac{L_s}{V_s}\right)_{min}=\frac{y_1-y_2}{x^*-x_2}$

$y_1=2.7x^*$ =>$x^*=7.4\times10^{-3}$，$\left(\frac{L_s}{V_s}\right)_{min}=\frac{0.02-2\times10^{-4}}{7.4\times10^{-3}-0}=2.676$

〈考題27－33〉(102化工技師)(5分)
噴霧塔(spray tower) Sol：請參考重點整理(十四)吸收塔的種類。

〈考題27－34〉(102經濟部特考)(5/8/2分)
在平衡級操作中，常用Kremser方程式如(表1)來計算板數(N)：若x、y分別是某一成份(A)在液、氣相中的莫耳分率，x_a和x_b分別代表成份A在進口及出口處之液相莫耳分率，x_a^*、x_b^*分別代表成份A在進口及出口處氣相達平衡時之液相莫耳分率，試回答下列問題：(一)一稀薄(Dilute)氨水溶液，欲利用一連續逆流之氣提(stripping)裝置，以空氣來移除水溶液中的氨(NH_3)。系統中空氣的莫耳流率爲V，氨水溶液之莫耳流率爲L，且NH_3在氣/液相間的平衡關係可利用$y=0.8x$來表示，請問在此一操作中，若欲達95%之移除率，則空氣對水溶液最小流率比$\left[\frac{V}{L}\right]_{min}$爲何？所需理想板數爲何？(二)呈第(一)小題。若空氣的流率(V)是氨水流率(L)的1.5倍，整個裝置有8個板，總板效率有75%。請利用Kremser方程式計算此一條件下NH_3移除率。(三)呈第(二)小題。若空氣的流率(V)增加，而

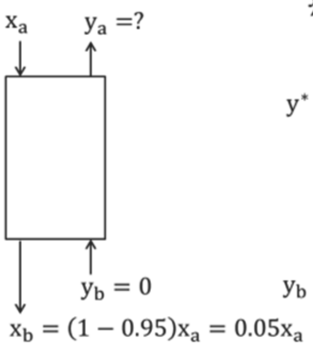
$$N=\frac{\ln\left(\frac{x_a-x_a^*}{x_b-x_b^*}\right)}{\ln\left(\frac{x_a-x_b}{x_a^*-x_b^*}\right)}$$
(表1)

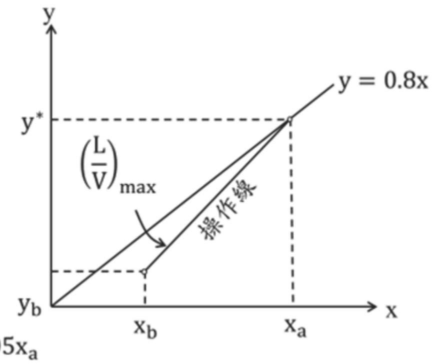
其他條件不變，則NH_3移除率會如何變化？請說明為什麼。

Sol：(一)與〈類題 27－30〉假設相同，在稀薄系統=>$\left(\frac{L}{V}\right)=\frac{y_a-y_b}{x_a-x_b}$

又$y^*=0.8x_a$ =>$\left(\frac{L}{V}\right)_{max}=\frac{y^*-y_b}{x_a-x_b}=\frac{0.8x_a-0}{x_a-0.05x_a}=0.842$

=>$\left(\frac{V}{L}\right)_{min}=\frac{1}{0.842}=1.188$，此時$N=N_\infty$



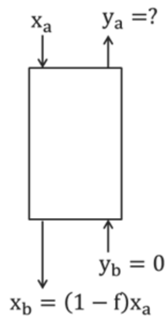


(二)$\eta=\frac{N_{ideal}}{N_{act}}\times100\%$ =>$75(\%)=\frac{N_{ideal}}{8}\times100\%$ =>$N_{ideal}=6$

$y_a=\frac{L}{V}(x_a-x_b)=\frac{1}{1.5}[x_a-x_a(1-f)]=0.67x_af$

$y_a=0.8x_a^*$ =>$0.67x_af=0.8x_a^*$ =>$x_a^*=0.8375x_af$

$y_b=0.8x_b^*$ =>$0=0.8x_b^*$ =>$x_b^*=0$



$S\left(氣提因子\right)=m\frac{V}{L}=\frac{氣提線斜率}{操作線斜率}=0.8\left(\frac{1.5}{1}\right)=1.2$

=>$N=\frac{\ln\left(\frac{x_a-x_a^*}{x_b-x_b^*}\right)}{\ln S}$ =>$6=\frac{\ln\left[\frac{x_a-0.8375x_af}{x_a(1-f)-0}\right]}{\ln(1.2)}$ =>$1.094=\ln\left(\frac{1-0.8375f}{1-f}\right)$(等號兩邊取 e)

=>$e^{1.094}=\frac{1-0.8375f}{1-f}$ =>$f=0.924=92.4(\%)$

(三)當空氣的流率(V)增加，可溶解的總量增加，去除率 f 也跟著增加。但要避免空氣的流率(V)增加過高產生的溢流現象。

〈考題27－35〉(103化工技師)(8分)

關於氣提(stripping)之敘述：(一)是指物質由氣相傳遞至液相。(二)與蒸發(evaporation)是指同一單元操作。

含水量$= 312.5 \times 0.2 = 62.5(\mathrm{kg})$

$\langle$考題 $29-7\rangle$(104 經濟部特考)(各 10 分)

一個平板固體之乾燥曲線，如圖所示，此固體之單位面積之重量爲$20\,\mathrm{kg/m^2}$(假設乾燥過程皆不變)：請參考重點整理附圖三

(一)從自由含水率(free moisture) $x_1 = 0.49\,\mathrm{kg \cdot H_2O/kg}$乾固料，恆速乾燥(constant rate)，乾燥至自由含水量$x_2 = 0.35\,\mathrm{kg \cdot H_2O/kg}$乾固料，恆速乾燥時間爲 2 小時(hr)，試計算恆速期乾燥速率R_c爲多少$\mathrm{kg \cdot H_2O/hr \cdot m^2}$？(二)此平板固體之減速期乾燥速率(falling rate, R)假設與自由含水量(X)呈線性關係：$R = ax$。試計算此固體自由含水量$x_2 = 0.35\,\mathrm{kg \cdot H_2O/kg}$乾固料，減速乾燥至自由含水量$x_3 = 0.05\,\mathrm{kg \cdot H_2O/kg}$乾固料，所需爲多少小時？[可能使用對數之數據：$\mathrm{Ln}(3) = 1.1$，$\mathrm{Ln}(5) = 1.61$，$\mathrm{Ln}(7) = 1.95$]

Sol：(一) $x_1 \to x_2$(恆速期)：假設$R = R_c$；$R = -\frac{m_s}{A}\frac{dx}{dt}$ (1)

$=> \int_0^t dt = -\frac{m_s}{A \cdot R_c}\int_{x_1}^{x_2} dx => R_c = \frac{m_s}{A \cdot t}(x_1 - x_2) = \frac{20}{2}(0.49 - 0.35) = 1.4\left(\frac{\mathrm{kg \cdot H_2O}}{\mathrm{hr \cdot m^2}}\right)$

(二) $x_2 \to$ 原點(由第一減速期開始至第二減速期爲止)：假設x_2至原點爲一直線，令$R = ax$ (沒有截距 b，因爲通過原點) $=> dR = adx$

代入(1)式$=> \int_0^t dt = -\frac{m_s}{aA}\int_{R_2}^{R_3}\frac{dR}{R} => t = \frac{m_s}{aA}\ln\left(\frac{R_2}{R_3}\right) = \frac{m_s}{aA}\ln\left(\frac{x_2}{x_3}\right)$ (3)

當$x_2 = x_c$ $=> R_2 = R_c$ $=> a\left(\text{斜率通過原點}\right) = \frac{R_c - 0}{x_c - 0} = \frac{R_c}{x_c}$

代入(3)式 $t = \frac{m_s \cdot x_c}{A \cdot R_c}\ln\left(\frac{R_2}{R_3}\right) = \frac{m_s \cdot x_c}{A \cdot R_c}\ln\left(\frac{x_c}{x_3}\right)$

$=> t = \frac{m_s \cdot x_c}{A \cdot R_c}\ln\left(\frac{x_c}{x_3}\right) = \frac{(20)(0.35)}{(1.4)}\ln\left(\frac{0.35}{0.05}\right) = 9.73(\mathrm{hr})$